

4 lutego 2026

Prof. dr hab. Paweł Sobkowicz
Narodowe Centrum Badań Jądrowych
Ul A. Sołtana 7, 04-500 Otwock Świerk

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr Krishanadasa Mohandasa pt. "Critical Properties of Structural Balance Models on Multiplex and Growing Networks", przedstawionej Radzie Naukowej Dyscypliny Nauki Fizyczne Politechniki Warszawskiej.

1. Wstęp

Przedmiot recenzji

Recenzowana praca dotyczy analizy zaawansowanymi metodami fizycznymi społecznych sieci w których uczestników łączą różnego rodzaju więzi, co można przedstawić jako funkcjonowanie w sieciach o charakterze wielowarstwowym. W szczególności dotyczy zastosowania teoria równowagi strukturalnej Fritza Heidera, która pomaga wyjaśnić ewolucję i organizację relacji społecznych, mogących mieć przyjazny lub wrogi charakter.

Rozprawa została przygotowana w języku angielskim, język pracy jest klarowny, narracja jest logiczna i dobrze ustrukturyzowana.

Rozprawa ma 122 strony i podzielona jest na pięć rozdziałów, z czego wyniki uzyskane przez Autora przedstawione są w trzech rozdziałach (drugim, trzecim i czwartym). Rozdział pierwszy wprowadza podstawowe pojęcia stosowane w pracy,

a rozdział piąty podsumowuje uzyskane wyniki. Bibliografia rozprawy liczy 135 pozycji.

Rozprawa oparta jest o dwie recenzowane publikacje, zamieszczone w wysoko ocenianym czasopiśmie *Physical Review E*, oraz jedną publikację o statusie preprintu, w których Kandydat jest pierwszym autorem.

K. Mohandas et al., "Critical properties of Heider balance on multiplex networks", Physical Review E **2024**, 109, DOI 10.1103/PhysRevE.109.044306

K. Mohandas et al., "Paradise-disorder transition in structural balance dynamics on Erdős-Rényi graphs", Physical Review E **2025**, 111, DOI 10.1103/PhysRevE.111.024310

K. Mohandas et al., "Structurally balanced growing network as randomized Pólya urn process", arXiv:2510.24659v1 [physics.soc-ph] **2025**, DOI 10.48550/arXiv.2510.24659

Uzyskane wyniki były także przedstawiane na międzynarodowych konferencjach i sympozjach.

Cel rozprawy i jego znaczenie

Motywacją rozprawy były dwie jasno sformułowane hipotezy badawcze.

Pierwsza dotyczyła sieci wielowarstwowych (ang. multiplex networks) i stanowiła, że wprowadzenie powiązań pomiędzy różnymi typami relacji społecznych (różnymi warstwami sieci) zwiększa ogólna stabilność struktury społecznej.

Druga hipoteza dotyczyła pochodzenia polaryzacji społecznej i podziału społeczności na konkurujące grupy w układach w których sieci te aktywnie rosną poprzez dołączanie nowych osób. Zakładała ona, że prosty, stochastyczny proces wzrostu przy założeniu określonych warunków może prowadzić do realistycznej dynamiki wzrostu polaryzacji i podziałów społecznych bez odwoływania się do konkretnych typów sieci i ich topologii (jak to ma miejsce w dotychczasowej literaturze modelującej to zagadnienie).

W celu weryfikacji tych hipotez przeprowadzono:

- Analizę rozszerzonego modelu równowagi strukturalnej Heidera w sieciach wielowarstwowych (o różnych topologiach) w funkcji temperatury i siły powiązań pomiędzy warstwami.

- Badania efektów ukierunkowanie (asymetrii) prawdopodobieństwa dołączania do sieci i typu połączeń, w kontekście dynamiki dyktowanej przez założenia równowagi strukturalnej Heidera; w szczególności w odniesieniu do formowania spolaryzowanych grup społecznych.

Praca wykorzystywała zróżnicowane metody badawcze zaczerpnięte z fizyki układów złożonych: począwszy od wyboru właściwego modelu upraszczającego zjawiska społeczne i definiującego pojęcia, zmienne i dynamikę modelu, a następnie znalezienia i analizę zachowania tak skonstruowanych modeli (zarówno analityczne jak i numeryczne). Modele opisane w rozprawie są albo istotnymi rozszerzeniami wcześniejszych lub nowymi propozycjami. Stąd też wynika „fizyczne” znaczenie rozprawy.

Jednocześnie, ze względu na fakt, że źródłem hipotez są nauki społeczne (psychologia i socjologia), przedstawione wyniki mogą zainteresować przedstawicieli tych nauk, przykładowo zainspirować badania dotyczące interakcji między różnymi typami relacji społecznych i ich wpływu na polaryzację.

2. Szczegółowy opis i ocena rozprawy

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera wprowadza czytelnika w zagadnienia i metody stosowane w dalszej części pracy. Wprowadzenie to obejmuje szeroki zakres tematów: informacje o sieciach, w tym w szczególności definicje podstawowych pojęć używanych w analizie sieci, w tym sieci wielowarstwowych i różnych typów powiązania między warstwami (węzeł-węzeł, połączenie-połączenie). Przedstawiono wybrane typy topologii sieci (w szczególności te, które będą wykorzystywane w dalszych analizach: sieci w których wszystkie węzły są połączone i sieci w których połączenia wiążą przypadkowe węzły, ang. *random networks*) oraz sieci dynamicznie rosnące. Wprowadzenie obejmuje definicje pojęć i odniesienia do kluczowej literatury przedmiotu. Następnie przedstawiono podstawowe założenia i pojęcia teorii równowagi strukturalnej Fritza Heidera, odnoszącej się do sytuacji, w której powiązania między osobami mogą mieć charakter pozytywny/negatywny (przyjaciół/wróg).

W końcowej części Rozdziału opisany został stochastyczny proces wzrostu sieci oparty na modelu losowania i wypełniania urn (ang. Pólya urn proces). Rozdział, mimo

koniecznej skrótowości (omawiane zagadnienia są bardzo rozbudowane), jest napisany klarownie i wprowadza czytelnika w podstawowe zagadnienia.

Rozdział drugi rozprawy dotyczy stabilności i przejść fazowych w sieciach wielowarstwowych w których dynamika określona jest przez kombinację oddziaływań Heiderowskich wewnątrz poszczególnych warstw oraz oddziaływań znanych z modelu Isinga wiążących powiązania (krawędzie w sieci) pomiędzy warstwami. Układ zdefiniowany w sekcji 2.2.1 opisuje ogólny system sieci składającej się z N węzłów i L warstw. Sieci jest kompletna – każda para agentów jest połączona (na każdej z warstw), przy czym znaki tych połączeń mogą przyjmować wartości $+1$ i -1 dla każdej z warstw. Sekcja 2.2.2 definiuje ogólny Hamiltonian dla tak skonstruowanej sieci. Zaproponowany Hamiltonian dopuszcza zróżnicowanie między siłą oddziaływań Heiderowskich w poszczególnych warstwach (parametr $A^{(\alpha)}$). Jednak siła oddziaływania między warstwami, opisywanego w modelu Isinga, przyjęta jest jako identyczna dla wszystkich warstw i opisane jednym parametrem K . Dodatkowo, w analizie dynamiki (sekcje 2.3 i 2.4) przyjęto, że wszystkie parametry $A^{(\alpha)}$ mają tę samą wartość A . ***Te uproszczenia pozwalają na wprowadzenie uniwersalnego skalowania niezbędnego dla rozwiązań w modelu pola średniego (sekcja 2.3), jednak ograniczają potencjalne zastosowania wyników w naukach społecznych, gdzie oczekiwać należy, że poszczególne typy powiązań społecznych mogą mieć różny wpływ dotyczący naszych wzajemnych zachowań.***

W sekcji 2.3.1 przedstawiono analityczne wyniki dla sieci dwuwarstwowych w przybliżeniu pola średniego. Najważniejsze z tych wyników to odkrycie przejścia fazowego polaryzacji (ze stanu spolaryzowanego do niespolaryzowanego) w sieci dwuwarstwowej, występującego w temperaturze krytycznej rosnącej wraz z wzrostem powiązania sieci w obu warstwach K . Wadą przybliżenia pola średniego jest to, że gdy system – wraz ze wzrostem temperatury – przejdzie ze stanu spolaryzowanego do niespolaryzowanego to późniejsze obniżenie temperatury nie odtwarza polaryzacji. Autor zaznacza, że jak wynika z późniejszych analiz (wychodzących poza przybliżenie pola średniego) obniżanie temperatury prowadzi do bardziej skomplikowanych zjawisk.

Sekcja 2.3.2 analizuje zależność temperatury krytycznej przejścia od stanu spolaryzowanego do niespolaryzowanego, dla sieci dwuwarstwowej wychodząc poza przybliżenie pola średniego.

Sekcje 2.3.3 i 2.3.4 rozszerzają wyniki modelu pola średniego na sieci wielowarstwowe i analizują asymptotyczne zachowanie temperatury krytycznej wraz ze wzrostem siły oddziaływań międzywarstwowych (w granicy $K \rightarrow \infty$), gdzie dla systemu L warstw temperatura krytyczna rośnie proporcjonalnie do L , ze współczynnikiem proporcjonalności równym temperaturze krytycznej dla sieci jednowarstwowej ($T_c(L) \approx L T_c(1)$).

Sekcja 2.4 dedykowana jest porównaniu uzyskanych wyników analitycznych z poprzedniej sekcji z wynikami symulacji numerycznych, uzyskanych metodą Monte Carlo. Porównanie to jest szczególnie interesujące, ze względu na to, że symulacje pozwalają na przekroczenie ograniczeń modeli analitycznych. W szczególności dotyczy to badań stabilności systemu ze względu na temperaturę. Opis analityczny koncentruje się na stabilności stanu początkowego zdefiniowanego jako „idealny” (ang. *paradise state*), w którym wszystkie połączenia mają charakter przyjazny (wartość +1). W symulacjach możliwy jest natomiast dowolny stan początkowy. Autor koncentruje się przy tym na kilku wariantach startowych dla poszczególnych warstw: stanie idealnym, stanie nieuporządkowanym i stanie w którym równowaga Heidera zapewniona jest przez podział na dwie grupy w których połączenia wewnętrzne są przyjazne a połączenia międzygrupowe nieprzyjazne (podział na kliki), przy czym rozważa, dla uproszczenia symetryczny podział na dwie równoliczne kliki. Tak dobrane stany początkowe dla poszczególnych warstw mogą być skombinowane w modelu wielowarstwowym. Bardzo interesujące są przy tym układy w których podział na kliki w różnych warstwach nie jest identyczny (co opisywane jest parametrem przekrycia ϕ). W dalszej części rozdziału 2.4 analizowane są szczególne przypadki kombinacji stanów początkowych poszczególnych warstw. Pozwoliło to na zidentyfikowanie zestawu temperatur progowych, powyżej których poszczególne układy przestają być stabilne. Najdokładniej zbadany został układ dwuwarstwowy (choć część analiz numerycznych dotyczyła układu trójwarstwowego), dla którego zbudowany został „diagram fazowy” wskazujące stabilne struktury w funkcji temperatury i siły oddziaływania międzywarstwowego K przy założeniu, że siły oddziaływania Heiderowskiego w obu

warstwach są identyczne (rys. 2.14). Zwrócić jednak trzeba uwagę, że diagram ten dotyczy wyłącznie sytuacji, w których odpowiednio wysoka temperatura destabilizuje założony na starcie symulacji układ początkowy. Rys. 2.15 ilustruje potencjalne przejścia między stanami w zależności od temperatury dla układu dwuwarstwowego.

W odniesieniu do opisanych powyżej wyników pojawiają się uwagi i pytania:

- „Diagram fazowy” jest raczej diagramem stabilności wybranych układów początkowych w odpowiednio wysokich temperaturach. Nie odpowiada na istotne (zarówno z fizycznego jak i społecznego punktu widzenia) pytania o zachowania systemu przy *obniżaniu* temperatury. Kiedy układ nieuporządkowany – przy obniżeniu temperatury poniżej T_c lub T_d pozostaje zamrożony w stanie nieuporządkowanym (analogia do przejścia ciec-z szkło) a kiedy też występuje globalne lub lokalne uporządkowanie (analogia do krystalizacji)? Jakie są niezbędne czasy takich przejść między stanami przy obniżaniu temperatury?
- Na diagramie 2.15 w obszarze między T_s a T_d przedstawiona jest strzałka skierowana od stanu nieuporządkowanego do stanu „matching order” (co dodatkowo potwierdzone jest w podsumowaniu rozdziału). Co do początkowego stanu „matching order” zakładana była równoliczność klik. Trudno jednak oczekiwać, by taka równoliczność występowała przy przejściu ze stanu nieuporządkowanego. Jaki był rozkład wielkości klik wynikających ze spontanicznego uporządkowania systemu do stanu „matching order”?

Rozdział trzeci poświęcony jest analizie równowagi strukturalnej w układach jedno i wielowarstwowych opartych na rozrzedzonych sieciach przypadkowych. Jak zauważa Autor, sieci takie są bardziej realistyczne niż w pełni połączone sieci rozważane w Rozdziale 2. Zasadnicze równania opisujące takie systemy są podobne do równań z poprzedniego rozdziału, z tą różnicą, że obok powiązań przyjaznych i nieprzyjaznych (o wartościach +1 i -1), brak powiązania opisywany jest wartością 0. Kluczowym parametrem sieci przypadkowej jest prawdopodobieństwo połączenia między węzłami sieci, p . W sekcji 3.3 Autor wyprowadza analityczne rezultaty w przybliżeniu pola średniego dla układu jedno- i dwuwarstwowego. W pierwszym przypadku uzyskane rezultaty są analogiczne do kompletnych sieci przeskalowanych o czynnik p^2 . W

drugim przypadku skalowanie jest bardziej skomplikowane, ze względu na skomplikowaną zależność stosunku sił wewnątrz i między warstwowymi od p . W dalszej części rozdziału, Autor dyskutuje charakter przejścia między stanem idealnym a nieuporządkowanym (biorąc pod uwagę skończoną wielkość systemu), porównując wyniki z wcześniejszymi publikacjami.

Podobnie jak poprzednio, wyniki analityczne zostały porównane z wynikami symulacji komputerowych. Dla przejścia od stanu idealnego dla pojedynczej warstwy do stanu nieuporządkowanego skalowalność p^2 jest bardzo dobrze zachowana – mimo, że całkowita liczba węzłów sieci jest stosunkowo mała ($N = 200$, Rys 3.5).

W sekcji 3.4.5 Autor przedstawia wyniki symulacji dla systemu dwuwarstwowego, zwracając uwagę na dobrą zgodność wyników analitycznych i numerycznych skalowanie temperatury krytycznej (gdy oddziaływanie wewnątrz warstwy (Heiderowskie) skaluje się jak A/p^2 , a międzywarstwowe (Isingowskie) jak K/p).

Wykazanie takiego prostego skalowania dla skomplikowanego układu sieci przypadkowych uważam za bardzo interesujący wynik pracy. Interesującym kierunkiem byłoby porównanie wyników uzyskanych dla sieci przypadkowych ER z wynikami dla sieci bezskalowych (co jednak wykracza poza zakres pracy).

Rozdział czwarty przedstawia wyniki analizy dynamicznie rosnącej sieci składającej się z dwu wzajemnie zantagonizowanych grup. Autor zaproponował tu bardzo interesujące podejście do zjawiska polaryzacji społecznej. Większość modeli znanych z literatury opiera się na dynamice przynależności do konkurujących grup (zmieniające się poglądy agentów, co w pewnym sensie przeczy wynikom badań psychologicznych, według których indywidualne poglądy dotyczące kluczowych spraw są stosunkowo stabilne) przy założeniu niezmiennych sieci powiązań społecznych. Bardziej zaawansowane modele obejmują równoczesne dynamiki indywidualnych opinii i zmiany powiązań sieciowych – odcinanie powiązań z agentami o przeciwnych poglądach i nawiązywanie nowych z agentami o podobnych poglądach. Model przedstawiony w pracy jest bardzo interesujący. Konceptyjnie oparty o schemat wypełniania urn zaproponowany przez Pólyię, model opisuje proces wzrostu sieci, w którym powstają zarówno przyjazne jak i nieprzyjazne połączenia. Tak powstająca sieć jest z założenia w stanie równowagi Heiderowskiej, co wiąże wyniki Rozdziału 4 a

poprzenimi, jednak uwaga autora skupia się na zależności liczebności antagonistycznych grup w rosnącej sieci w funkcji podstawowych parametrów modelu. Pierwszym z parametrów jest początkowy skład sieci (gdzie Autor rozróżnia asymetryczne warunki początkowe (kliki różnią się liczebnością) od warunków symetrycznych (początkowo kliki są równoliczne). Drugim parametrem jest kluczowym elementem dynamiki wzrostu sieci. W zaproponowanym modelu, w kolejnym kroku ewolucji systemu nowy węzeł tworzy połączenie z dowolnie wylosowanym już istniejącym węzłem j . Z prawdopodobieństwem p połączenie to jest przyjazne, nowy węzeł dołącza do kliki reprezentowanej przez węzeł j , a następnie tworzone są połączenia z innymi węzłami sieci: przyjazne wewnątrz kliki, nieprzyjazne na zewnątrz. Alternatywnie, z prawdopodobieństwem $1 - p$ powiązanie z wylosowanym węzłem j może być nieprzyjazne, nowy węzeł „przystępuje” do kliki przeciwnej klicie węzła j , i odpowiednio tworzy dalsze powiązania.

Autor analizuje dynamikę wzrostu liczebności klik w zależności od wartości p oraz warunków początkowych. Szczególną uwagę zwraca na rozkłady liczebności, w tym na warunki, w których z upływem czasu rozkład zachowuje formę unimodalną lub ewoluuje do formy dwumodalnej. Centralnym wnioskiem modelu jest to, że dla $p < 1$ system stopniowo dąży do stanu, w którym liczebność klik jest porównywalna (szczególnie dotyczy to względnej, znormalizowanej do całkowitej liczby węzłów liczebności klik). Autor wyróżnia tu kilka typów zachowań. Dla $p < 0.5$ sieć bardzo szybko osiąga równowagę gdzie kliki są równoliczne. Dla $0.5 < p < p^{ch} = 0.836$ średnie wielkości mogą się różnić, jednak fluktuacje są na tyle duże, że końcowy rozkład jest unimodalny. Dla $p > p^{ch}$ bezwzględne liczebności grup mogą się różnić na tyle, że rozkład staje się dwumodalny. Co jednak istotne, to fakt, że *znormalizowane* liczebności grup ewoluują do rozkładu 50/50, o ile tylko $p < 1$.

W końcowej części rozdziału Autor przedstawia krótką analizę społecznej interpretacji modelu, Jest to o tyle interesujące, że odpowiada na fundamentalne pytanie dotyczące częstych przypadków, w których konkurencja między dwoma dominującymi ugrupowaniami politycznymi (lub między dwoma alternatywnymi opcjami w referendum) w systemach demokratycznych stabilnie oscyluje w pobliżu układu 50/50. W literaturze dotyczącej modelowania opinii istnieją inne próby wyjaśniania powszechności takiego rozkładu (jak na przykład propozycje Serge’a Galama), jednak

wnioski z modelu opartego na procesie Polyi są nie tylko matematycznie proste ale w dużym stopniu oparte są na analogiach z rzeczywistymi procesami społecznymi. **W tym kontekście interesującym byłoby pytanie (wykraczające poza zakres rozprawy) o możliwość takiego rozszerzenia modelu, w którym po osiągnięciu pewnej liczebności całkowitej, proces dołączania nowych węzłów równoważony byłby usuwaniem węzłów z sieci (na przykład najstarszych).**

Rozdział piąty przedstawia skrótowe podsumowanie wyników przedstawionych w poprzedzających rozdziałach.

3. Uwagi ogólne

Pierwsza część pracy (rozdziały 2 i 3) wykorzystywały założenie, że dynamika zachowań w poszczególnych warstwach sieci oparta jest o oddziaływania prowadzące do równowagi strukturalnej Heidera, a więc oddziaływania między trójkami węzłów. Takie podejście ma swój rodowód i uzasadnienie wynikające z obserwacji systemów społecznych (dobrze oddawane przez maksymy „przyjaciół mojego przyjaciela jest moim przyjacielem, wróg mojego wroga jest moim przyjacielem”). Modele zakładały jedynie komponentę „Isingowską” między warstwami sieci – i to między połączeniami, a nie węzłami sieci.

Jak wynika z analizy rozprawy, takie podejście daje możliwość uzyskania bardzo interesujących wyników. Jednak – z mojego osobistego przekonania – ograniczenie dynamiki w *obrębie warstwy* wyłącznie do oddziaływań trójkowych (równanie 2.1 i jego dalsze wersje) zaniedbuje istotną społecznie rolę oddziaływań między *parami* węzłów, mogących modyfikować dynamikę systemu. W terminologii społecznej: nie wszystkie przyjaźnie są równoważne i nie wszyscy wrogowie są równie groźni. Równoczesne użycie oddziaływań między parami i trójkami może być zresztą interesujące nie tylko z punktu widzenia socjologii ale i fizyki.

Otwiera to – w zakresie wykraczającym poza przedstawioną rozprawę – interesujące pole do rozwoju. Warto rozważyć konsekwencje takiego rozszerzenia modeli. Pytanie o potencjalne efekty pozostawiam otwartym.

W odniesieniu do wyników Rozdziału 4 dostrzegam podobny potencjał kontynuacji i rozszerzenia wyników poprzez dedykowane badania socjologiczne testujące czy i w

jakich warunkach dynamika opisana przez proces urn Polyi ma odpowiednik w rzeczywistości (a w dalszej konsekwencji, jakie cechy osobowe decydują o „kolorze” w rzeczywistych procesach społecznych).

Uwagi te (jak napisałem, wykraczające poza wymagania stawiane rozprawie jako takiej) mają o tyle znaczenie dla recenzji, że dobrze dokumentują istotność wybranej tematyki dla rozwoju nauki, nie tylko fizyki.

4. Wnioski końcowe

W mojej opinii rozprawa mgr Krishanadasa Mohandasa zawiera zróżnicowane i interesujące opracowania w dziedzinie układów złożonych. Umiejętnie połączone zostały wyniki analityczne i symulacje komputerowe, komplementarnie wykorzystując silne strony każdego z tych podejść.

Praca w zupełności spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim. Stawiam wniosek o dopuszczenie pracy do publicznej obrony.



Prof. dr hab. Paweł Sobkowicz